



ОБ ЭФФЕКТИВНОМ ПОДХОДЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В НЕОГРАНИЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е. А. КАУННИКОВА

*Белгородский
государственный
национальный
исследовательский
университет*

*e-mail:
kanunnikova@bsu.edu.ru*

В статье представлены существующие подходы моделирования стационарных физических полей в неограниченном пространстве. Приводится перспективный подход, основанный на конформном преобразовании неограниченного пространства к конечной двусоставной области. Описываются особенности алгоритма. Проведено сравнение данных вычислительного и натурального экспериментов.

Ключевые слова: моделирование стационарных полей, аналитико-численный подход, неограниченное пространство.

Возникающие потребности практики, требующие повышения эффективности сложных и, как правило, дорогостоящих систем (воздушных линий постоянного тока с высокотемпературными проводами, систем молниезащиты, систем рассеивания тумана и др.), приводят к необходимости совершенствования, разработки методов математического моделирования физических полей, методов, обеспечивающих высокую точность, при одновременном ограничении на допустимые объем вычислений и памяти. Следует отметить, что такие задачи решаются только методами моделирования. Задачи, связанные с определением электрических полей исследуемых систем, относятся к классу внешних краевых задач. Известны методы моделирования физических полей в неограниченном пространстве, описываемых рассматриваемым классом уравнений, И. Яна (I. Yang) [4], Ф. де Алессандро (F. D'Alessandro) [2], С. Алексик (S.R. Aleksić) [1], З.М. Наркуна [13], М.М. Резинкиной [15], Г.А. Рязанова [17], Л.В. Нипецкого [14], Н.Н. Калиткина [11, 10], Е.А. Альшиной [7, 10], И.Л. Софронова [18], В.С. Рябенского [16] и др. Известные методы решения внешних краевых задач, как правило, сложны в реализации, не гарантируют нахождения точного решения или применимы для узкого класса задач, что ведет к необходимости их модификации, развития. Перспективным является метод инверсии [12], используемый при моделировании стационарных физических полей в неограниченном пространстве и полупространстве, решении внешних краевых задач с граничными условиями Дирихле и Неймана в двумерном и трехмерном полупространстве.

В отличие от ранее выполненных работ сходной тематики данный подход позволяет решать внешние краевые задачи в двумерном и трехмерном полупространстве с заданием граничных условий как на замкнутых, так и на полубесконечных и бесконечных поверхностях в соответствии с методом инверсии, учитывающем значения в обеих частях двусоставной области и повышающем быстродействие решения подобного класса задач при моделировании электрических полей.

Метод инверсии позволяет сводить неограниченное пространство к конечной двусоставной области, в которой строится разностная задача, например, методом конечных разностей.

Если обозначить конечную область, ограниченную кривой $C^{1/2}$ и прямой E_2^1 , через $D^{1/2}_C$, а неограниченную область, внешнюю к полуокружности $C^{1/2}$ и ограниченную прямой E_2^1 , через $D^{1/2}_\infty$, то полупространство $\mathbb{R}^2_{1/2} = G \cup \Gamma \cup E_2^1 \cup G_e^{1/2}$, $G_e^{1/2} = D_C^{1/2} \cup C^{1/2} \cup D_\infty^{1/2}$ (рис. 1, а) преобразуется в конечную область

$D_2^{1/2} = G \cup \Gamma \cup \Xi_2^1 \cup \tilde{D}_2^{1/2}$, $\tilde{D}_2^{1/2} = D_c^{1/2} \cup C^{1/2} \cup D_{1/2}^*$ (рис. 1, б), где $D_{1/2}^*$ — конечная область, представляющая собой отображение неограниченной области $D_{1/2}^\infty$. При этом следует отметить, что граница Ξ_2^1 проходит через геометрический центр области $D_{1/2}^2$.

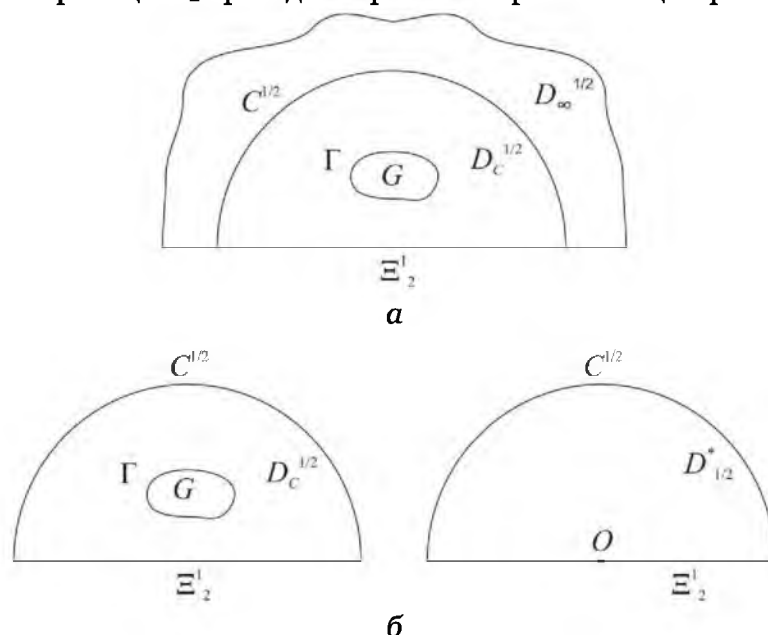


Рис. 1. Схематическое изображение: а – полупространства $\mathbb{R}_{1/2}^2$;
б – двусоставной области $D_{1/2}^2$

Аналогично преобразуется трехмерное полупространство $\mathbb{R}_{1/2}^3 = G \cup \Sigma \cup \Xi_3^1 \cup G_e^{1/2}$, $G_e^{1/2} = D_s^{1/2} \cup S^{1/2} \cup D_\infty^{1/2}$ относительно полусферы $S^{1/2}$ в конечную область $D_3^{1/2} = G \cup \Sigma \cup \Xi_3^1 \cup \tilde{D}_3^{1/2}$, $\tilde{D}_3^{1/2} = D_s^{1/2} \cup S^{1/2} \cup D_{1/2}^*$.

При моделировании плоскопараллельного электрического поля необходимо решить внешнюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа на плоскости

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{в } G_e^{1/2}, \\ u|_\Gamma &= \varphi(P), \quad P \in \Gamma, \\ u|_{\Xi_2^1} &= 0, \\ u(M) &\rightarrow 0 \quad \text{при } M \rightarrow \infty, \end{aligned} \right\}$$

которая согласно методу инверсии принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{в } \tilde{D}_2^{1/2}, \\ u|_\Gamma &= \varphi(P), \quad P \in \Gamma, \\ u|_{\Xi_2^1} &= 0, \\ u(M) &= 0, \quad M \in D_{1/2}^*. \end{aligned} \right\}$$

При моделировании трехмерного электрического поля необходимо решить внешнюю задачу Дирихле следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{в } G_e^{1/2}, \\ u|_\Sigma &= \varphi(P), \quad P \in \Sigma, \\ u|_{\Xi_3^1} &= 0, \\ u(M) &\rightarrow 0 \quad \text{при } M \rightarrow \infty, \end{aligned} \right\}$$



которая согласно методу инверсии записывается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{в } \tilde{D}_3^{1/2}, \\ u|_{\Sigma} &= \varphi(P), \quad P \in \Sigma, \\ u|_{\Sigma_3} &= 0, \\ u(M) &= 0, \quad M \in D_{1/2}^* \end{aligned} \right\}$$

Следует отметить, что при наличии симметрии добавляется граница с однородным условием Неймана, а задача рассматривается в четверной части конечной двусоставной области, полученной согласно методу инверсии.

Для построения двумерной и трехмерной разностных задач методом конечных разностей вводится универсальная регулярная прямоугольная сетка в области $D^{1/2}_d$, $d=2, 3$ и аппроксимируется на этой сетке уравнение и краевые условия.

Матрицы полученных систем алгебраических уравнений являются редкими, поэтому для их решения используются итерационные методы, которые не требуют хранения многих матричных элементов, являются самокорректирующимися, что минимизирует ошибки округления. Существует ряд итерационных методов с быстрой сходимостью, например, экстраполяционный метод Либмана [9].

Детализируя особенности алгоритма расчета задач, отметим, что для повышения быстродействия геометрия тел, источников задается при помощи уравнений эллипса, прямой, плоскости, а расчет начинается на сетке с крупным шагом. В частности, при расположении источников, оставляющих расщепленного полюса по окружности расщепленный полюс может быть заменен одиночным эквивалентным проводом [6], который при том же потенциале имеет тот же заряд, поэтому для плоскопараллельного поля первоначально решается задача для эквивалентного одиночного провода. При повторном расчете шаг сетки уменьшается в 2 раза, и так производится до тех пор, пока не будет достигнута заданная допустимая погрешность расчетов.

Ввиду того, что при численном решении краевой задачи учитываются точки всей двусоставной области $D^{1/2}_d$, $d=2, 3$, то значения в точках обеих частей двусоставной области используются как при решении задач, так и при анализе численных результатов, а координаты точек области $D_{1/2}^*$ определяются исходя из метода инверсии.

Произведенные тестовые расчеты показали, что разработанные алгоритмы сокращают требуемый объем вычислительных ресурсов, в частности, для задачи, приведенной в [5], время расчета задачи по методу инверсии составило 2 % времени расчета задачи в искусственно ограниченной области с обычными характеристическими граничными условиями. Обнаружено существенное увеличение точности тестовых расчетов согласно развиваемому методу инверсии по сравнению с другими подходами, использующими, в частности, обычные характеристические граничные условия. Помимо этого, компьютерное моделирование стационарных физических полей на основе метода инверсии адекватно результатам вычислительного и натурного экспериментов, проведенных другими авторами [3, 5, 8, 13, 15], качественно и количественно.

В заключении отметим, что полученные результаты представляют интерес при решении комплекса задач, связанных с различными аспектами моделирования стационарных физических полей в неограниченном пространстве, а предложенный подход, который основан на применении метода инверсии, удачно сочетающего в себе универсальность численных и точность аналитических подходов, позволяет эффективно проводить исследования. Рассматриваемый подход открывает возможность аналогичных экономных и высокоточных решений многих других задач, которые в данной работе не рассмотрены и требуют дальнейшего детального изучения, в частности, при комплексном исследовании научных и технических, фундаментальных и прикладных проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента на новых высокопроизводительных системах.



Литература

1. Aleksić, S.R. Determination of critical atmospheric electric field around Franklin's lightning protection rod that leads to break-down / S.R. Aleksić, S.S. Ilić // *Acta Electrotechnica et Informatica*. – 2007. – № 2. – Vol. 7. – P. 3–9.
2. D'Alessandro, F. Electric field modelling of structures under thunderstorm conditions / F. D'Alessandro, J.R. Gumley // *Proc. of the 24th International Conf. on Lightning Protection*. – Birmingham, Britain, 1998. – P. 457–462.
3. Holtzhausen, J.P. Corona On The Cahora Bassa DC Line: Theory And Tests On A Scale Model / J.P. Holtzhausen, H. Hendricks, P.J. Pieterse // *SAUPEC 2002, Vanderbijlpark, January 2002*. – P. 283–287.
4. Yang, Y. The strip simulation method for computing electric field on conductor surfaces / Y. Yang, D. Dallaire, J. Ma, and F.P. Dawalibi // *Power and Energy Systems (EuroPES 2003): proceedings of the Third IASTED International Conference 3-5 sept. 2003, Marbella*. – 2003. – P. 353–357.
5. Zhang, Z. Measurement of Corona Characteristics and Electromagnetic Environment of ± 800 kV HVDC Transmission Lines under High Altitude Condition / Z. Zhang, R. Zeng, Z. Yu // *Progress In Electromagnetics Research Symposium : PIERS Proceedings, 18-21 Aug. 2009. – Moscow, 2009*. – P. 61–65.
6. Александров, Г.Н. Сверхвысокие напряжения / Г.Н. Александров. – М., 1973.
7. Альшина, Е. А. Численное решение краевых задач в неограниченной области / Е.А. Альшина, Н.Н. Калиткин, С.Л. Панченко // *Математическое моделирование*. – 2002. – Т. 14, №11. – С. 10–22.
8. Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле / Л.А. Бессонов. – М.: Гардарики, 2001. – 317 с.
9. Бинс, К. Анализ и расчет электрических и магнитных полей / К. Бинс, П. Лауренсон. – М.: Энергия, 1970. – 376 с.
10. Вычисления на квазиравномерных сетках / Н. Н. Калиткин, А. Б. Альшин, Е. А. Альшина и др. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 224 с.
11. Калиткин, Н. Н. Метод квазиравномерных сеток в бесконечной области / Н. Н. Калиткин, Н. О. Кузнецов, С. Л. Панченко // *ДАН*, 2000. – Т. 374, № 5. – С.598–601.
12. Канунникова, Е. А. Математическое моделирование электрических полей методом инверсии: монография / Е. А. Канунникова. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2010. – 92 с.
13. Наркун, З. М. Вычисление электрической емкости системы проводов круглого и эллиптического сечения и в виде пластин в присутствии проводящей плоскости / З. М. Наркун // *Журнал технической физики*. – 2000. – Т.70, вып. 2. – С. 1–5.
14. Ницецкий, Л. В. Аналоговые и разностные методы решения внешних краевых задач / Л.В. Ницецкий // *Учен. зап. Риж. политех. ин-та*. – Рига, 1965. – Т. XII, вып. 2.
15. Резинкина, М. М. Расчет трехмерных электрических полей в системах, содержащих тонкие проволоки / М. М. Резинкина // *Электричество*. – 2005. – № 1. – С. 44–49.
16. Рябенский В.С. Метод разностных потенциалов и его приложения. – М.: Физматлит, 2002. – 496 с.
17. Рязанов, Г. А. Опыты и моделирование при изучении электромагнитного поля / Г. А. Рязанов. – М.: Наука, 1966. – 191 с.
18. Софронов, И.Л. Точные искусственные граничные условия для некоторых задач аэродинамики и дифракции: автореферат дис. ... доктора физико-математических наук: 01.01.07/ Софронов Иван Львович. – М.: ИПМ РАН им. М.В. Келдыша. – 1999. – 28 с.

ON EFFECTIVE APPROACH TO SIMULATE STATIONARY PHYSICAL FIELDS IN AN INFINITE DOMAIN

E. A. KANUNNIKOVA

*Belgorod National Research
University*

*e-mail:
kanunnikova@bsu.edu.ru*

The article discusses some problems relating to the existing approaches to simulate the stationary physical fields in an infinite domain. The perspective approach based on a conformal transformation of the domain from infinite to bounded is considered. The algorithm features are described. The computation results have been compared with full-scale experiment results.

Keywords: stationary fields simulation, analytical-and-numerical approach, infinite domain.